סיכום ממדים — גרסת הדפסה

אלגברה ליניארית 1 — הרצאות 8–15 + תרגולים

תת-מרחב (Subspace)

הגדרה: תת-מרחב וקטורי

תת-קבוצה לא ריקה $V \subseteq W$ היא **תת-מרחב** אם מתקיימים שלושת התנאים:

1. $W \ni \vec{0}$
2. **סגירות לחיבור:** אם $u, w \in W$ אז $u + w \in W$
3. **סגירות לכפל בסקלר:** אם $u \in W$ ו-$\alpha \in F$ אז $\alpha u \in W$

טיפ:

קיצור דרך: אפשר לבדוק תנאי אחד במקום שלושה: $W \neq \emptyset$ ולכל $u, w \in W$ ולכל $\alpha, \beta \in F$: $\alpha u + \beta w \in W$.

הגדרה: חיבור תתי-מרחבים

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

זהו תת-מרחב של V, ובעצם הקטן ביותר שמכיל את U ואת W.

הגדרה: סכום ישר (Direct Sum)

$V = U \oplus W$ אם $V = U + W$ וגם $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

שקול: כל $v \in V$ מתפרק **באופן יחיד** ל-$v = u + w$ עם $u \in U, w \in W$.

משפט: תכונות חשובות

- חיתוך של תתי-מרחבים הוא תת-מרחב: $W \cap U$ תת-מרחב
- איחוד של תתי-מרחבים **לא** בהכרח תת-מרחב! (אלא אם אחד מכיל את השני)
- אם $V \subseteq W$ תת-מרחב ו-$\dim V = \dim W$ אז $V = W$

אזהרה:

טעות נפוצה: לא לשכוח לבדוק $W \ni \vec{0}$! למשל, $W = \{(x,y) \mid x + y = 1\}$ **אינו** תת-מרחב כי $W \not\ni (0,0)$.

מרחב נפרש (Span)

הגדרה: מרחב נפרש

עבור $v_1,...,v_k \in V$:

$$\mathrm{Span}\{v_1,...,v_k\} = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k \mid \alpha_1,...,\alpha_k \in F\}$$

כלומר — אוסף כל **הצירופים הלינאריים** של הוקטורים.

משפט: תכונות Span

- $\mathrm{Span}(\varnothing) = \{0\}$
- $\mathrm{Span}(S)$ תמיד תת-מרחב
- $\mathrm{Span}(S)$ הוא תת-המרחב **הקטן ביותר** שמכיל את S
- אם $v \in \mathrm{Span}\{v_1,...,v_k\}$ אז $\mathrm{Span}\{v_1,...,v_k,v\} = \mathrm{Span}\{v_1,...,v_k\}$
- אם $v \notin \mathrm{Span}\{v_1,...,v_k\}$ אז $v, v_1,...,v_k$ בת"ל

דוגמה: האם וקטור שייך ל-Span?

האם $(2,4,-7) \in \mathrm{Span}\{(1,1,0), (0,0,1), (1,2,3)\}$?

פותרים: $\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,0,1) + \alpha_3(1,2,3) = (2,4,-7)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \end{array}\right] \rightarrow \text{דירוג} \rightarrow \text{פתרון יחיד}$$

נקבל: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -4, \alpha_3 = 2$. כלומר **כן, שייך ל-Span**.

תלות / אי-תלות לינארית

הגדרה: אי-תלות לינארית (בת"ל)

$v_1, ..., v_k \in V$ **בלתי תלויים לינארית** אם:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$$

כלומר — הצירוף הלינארי **היחיד** שנותן 0 הוא הטריוויאלי.

הגדרה: תלות לינארית (ת"ל)

$v_1, ..., v_k$ **תלויים לינארית** אם קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_k$ **לא כולם 0** כך ש- $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = \vec{0}$.

שקול: אחד מהוקטורים הוא צ"ל של האחרים.

משפט: תכונות חשובות

- וקטור בודד $v \neq \vec{0}$ תמיד בת"ל
- קבוצה שמכילה את $\vec{0}$ תמיד ת"ל
- אם v_1, v_2 ת"ל, אחד הוא כפולה סקלרית של השני
- תת-קבוצה של קבוצה בת"ל — גם בת"ל
- קבוצה שמכילה קבוצה ת"ל — גם ת"ל

משפט: בת"ל ⟺ ייצוג יחיד (הרצאה 9)

$v_1, ..., v_k$ בת"ל ⟺ לכל $v \in Span\{v_1, ..., v_k\}$ קיים ייצוג **יחיד** כצ"ל.

הוכחה:

⟹ (בת"ל → ייצוג יחיד):

נניח שני ייצוגים: $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k$

חיסור: $(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + ... + (\alpha_k - \beta_k) v_k = \vec{0}$

מבת"ל: $\alpha_i - \beta_i = 0$ לכל i, כלומר $\alpha_i = \beta_i$.

⟸ (ייצוג יחיד → בת"ל):

נניח $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = \vec{0}$. גם $\vec{0} \cdot 0 = v_1 + ... + 0 \cdot v_k$.

מייצוג יחיד: $\alpha_i = 0$ לכל i. בת"ל.

שיטת בדיקת בת"ל (תרגול 6)

1. כתוב $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = \vec{0}$
2. בנה מטריצת מקדמים A (הוקטורים כעמודות)
3. דרג את $Ax = 0$
4. אם רק פתרון טריוויאלי ← **בת"ל**
5. אם יש משתנים חופשיים ← **ת"ל**

דוגמה: בדיקת תלות ב-$\mathbb{R}^3$ (תרגול 6)

$v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (0,0,1),\ v_3 = (2,2,-1)$

```
                              R₂→R₂−R₁     [0 | 2 0 1]
            [0 | 2 0 1]   →————————————    [0 | 2 0 1]
              [0 | 0 0 0]                  [0 |1− 1 0]
                 [0 |1− 1 0]
```

α_3 משתנה חופשי ← **ת"ל!**

למשל $\alpha_3 = 1$ נותן $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = -2$: כלומר $v_3 = 2v_1 - v_2$.

דוגמה: בדיקת פרישה ב-$\mathbb{R}^3$ (תרגול 6)

האם $v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (0,0,1),\ v_3 = (1,2,3)$ פורשים את $\mathbb{R}^3$?

לכל $b = (b_1,b_2,b_3)$ פותרים $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = b$:

```
          [1 0 0 | 2b₁−b₂]           [b₁ | 1 0 1]
     [0 1 0 | b₃−3b₂+3b₁]   → → →    [b₂ | 2 0 1]
          [0 0 1 | b₂−b₁]            [b₃ | 3 1 0]
```

פתרון יחיד **לכל** b ← **כן, פורשים את $\mathbb{R}^3$**. (וגם בת"ל!)

בסיס (Basis)

הגדרה: בסיס

קבוצה $V \supseteq B$ היא **בסיס** של V אם:

1. $\text{Span}(B) = V$ (B פורש את V)
2. B **בלתי תלוי ליניארית**

בסיסים סטנדרטיים

F^n:
$e_1=(1,0,...,0),\ e_2=(0,1,...,0),...,\ e_n=(0,...,0,1)$

$F_n[x]$ (פולינומים מדרגה $\leq n$):
$\{1,\ x,\ x^2,\ ...,\ x^n\}$

M_{m×n}(F) (מטריצות):
$\{E_{ij}\}$ — מטריצה עם 1 במקום (i,j) ו-0 בשאר

משפט: תכונות הבסיס

- לכל מ"ו סוף-ממדי **קיים** בסיס
- **כל בסיס של V הוא באותו גודל** (מלמת שטייניץ)
- אם B בסיס אז לכל $v \in V$ יש ייצוג **יחיד** כצ"ל של אברי B

משפט: המשפט ה-"שלישייה" (הרצאה 10)

אם $\dim V = n$ ו-$S \subseteq V$ עם $|S| = n$, אז:

S בסיס ⟸⟹ S בת"ל ⟸⟹ S פורש את V

חשוב מאוד! מספיק לבדוק **רק אחד** מהשניים (בת"ל או פורש) כשיש לנו בדיוק n וקטורים.

טיפ:

במבחן: אם נותנים n וקטורים ב-F^n ושואלים "האם בסיס?" — מספיק לבדוק בת"ל **בלבד** (או פריש בלבד). לא צריך את שניהם!

איך מוצאים בסיס?

שיטה 1 — מקבוצה פורשת: מתחילים עם קבוצה פורשת, מסירים וקטורים תלויים עד שנשארת קבוצה בת"ל.

שיטה 2 — מקבוצה בת"ל: מתחילים עם קבוצה בת"ל, מוסיפים וקטורים שלא ב-Span עד שפורשים.

שיטה 3 — פרמטריזציה: עבור תת-מרחב המוגדר ע"י משוואות, מציבים פרמטרים ומוצאים וקטורים יוצרים.

דוגמה: מצא את בסיס לתת-מרחב (תרגול 7)

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$

פרמטריזציה: $x = -y$, אז:

$y(-1,1,0) + z(0,0,1) = (y,\ y,\ z-) = (x,y,z)$

בסיס: $\{(1,1,0-),\ (0,0,1)\}$, לכן $\dim W = 2$.

דוגמה: השלמה לבסיס (תרגול 8)

$S = \{u_1=(1,0,1,2),\ u_2=(0,1,1,2)\} \subset \mathbb{R}^4$. השלם לבסיס של $\mathbb{R}^4$.

$\dim(\mathrm{Span}\ S) = 2$. צריכים עוד 2 וקטורים בת"ל.

מוסיפים: $u_3 = (0,0,1,0)$ ו- $u_4 = (0,0,0,1)$.

בסיס $\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\}$:$\mathbb{R}^4$.

בונוס: $W = \mathrm{Span}\{u_3,\ u_4\}$ הוא משלים ישר: $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

ממד (Dimension)

הגדרה: ממד

הממד של מ"ו V (מסומן $\dim V$) הוא **מספר האיברים בבסיס כלשהו** של V.

(מוגדר היטב כי כל הבסיסים באותו גודל.)

ממדים חשובים

$\dim(F^n)$	**= n**
$\dim(F_n[x])$	**= n + 1**
$\dim(M\_m{\times}n(F))$	**= m · n**
$\dim(\{0\})$	**= 0**
$\dim(F[x])$ (כל הפולינומים)	**= ∞**

משפט: תכונות ממד

- אם $V \subseteq W$ תת-מרחב אז $\dim W \leq \dim V$
- אם $V \subseteq W$ ו- $\dim W = \dim V$ אז $W = V$
- כל קבוצה בת"ל ב-V מכילה **לכל היותר** $\dim V$ וקטורים
- כל קבוצה פורשת של V מכילה **לפחות** $\dim V$ וקטורים

אזהרה:

טעות נפוצה: $\dim(F_n[x]) = n + 1$ ולא n! הבסיס הוא $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ — זה n+1 איברים.

למת שטייניץ (Steinitz Lemma)

משפט: למת שטייניץ (למת ההחלפה)

יהיו $v_1,...,v_k$ בת"ל ו- $w_1,...,w_m$ פורשים את V. אז:

1. $k \le m$ (לא יכולים להיות יותר בת"ל מפורשים)
2. ניתן **להחליף** k מהוקטורים הפורשים בוקטורים הבת"ל ולשמור על פריש

הוכחה:

באינדוקציה על k:

בסיס (k=0): $0 \le m$ טריוויאלי.

צעד: נניח נכון ל-k-1. הוקטורים $v_1,...,v_{k-1}$ בת"ל (תת-קבוצה של קבוצה בת"ל).

$v_k \in V = \mathrm{Span}\{w_1,...,w_m\}$, אז $v_k = \Sigma\beta_j w_j$. קיים j כך ש- $\beta_j \neq 0$ (כי $v_k \neq 0$).

בה"כ j=m. אז $w_m = (1/\beta_m)(v_k - \Sigma_{j=1}^{m-1} \beta_j w_j)$.

לכן $v_k, w_1,...,w_{m-1}$ פורשים את V.

מהנחת האינדוקציה על $v_1,...,v_{k-1}$ (בת"ל) ו- $v_k, w_1,...,w_{m-1}$ (פורשים, m איברים):

$k-1 \le m$, כלומר $k \le m+1$.

בעצם: k-1 ≤ m (כי הקבוצה הפורשת היא m איברים), ולכן $k \le m$.

משפט: מסקנות מלמת שטייניץ

- **כל הבסיסים באותו גודל** → dim מוגדר היטב
- ב- F^n: יותר מ-n וקטורים = בהכרח ת"ל
- פחות מ-n וקטורים = בהכרח לא פורשים את F^n

טיפ:

למבחן: הוכחת שטייניץ ארוכה. אם זה שאלת הוכחה במבחן — שקלו לדלג עליה ולעשות שאלה אחרת (אלא אם שיננתם).

נוסחת הממדים

משפט: נוסחת הממדים (הרצאה 12)

עבור תתי-מרחבים $U, W \subseteq V$ סוף-ממדיים:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

הוכחה:

יהי $\{w_1,...,w_r\}$ בסיס של $U \cap W$.

נשלים לבסיס של U: $\{w_1,...,w_r, u_1,...,u_k\}$ בסיס U.

נשלים לבסיס של W: $\{w_1,...,w_r, v_1,...,v_l\}$ בסיס W.

טענה: $\{w_1,...,w_r, u_1,...,u_k, v_1,...,v_l\}$ בסיס של $U + W$.

פורש: כל $u + w \in U + W$ ניתן לכתוב כצ"ל של הוקטורים הנ"ל.

בת"ל: נניח $\Sigma\alpha_i w_i + \Sigma\beta_j u_j + \Sigma\gamma_l v_l = \vec{0}$.

אז $\Sigma\gamma_l v_l = -\Sigma\alpha_i w_i - \Sigma\beta_j u_j \in U$. אבל גם $\in W$. לכן $\in U \cap W$.

אז $\Sigma\gamma_l v_l = \Sigma\delta_i w_i$. מבת"ל של בסיס W: כל $\gamma_l = \delta_i = 0$.

חוזרים ומקבלים שגם כל $\alpha_i = \beta_j = 0$.

סה"כ: $\dim(U+W) = r + k + l = (r+k) + (r+l) - r = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W)$.

משפט: מסקנות

- אם $U \cap W = \{\vec{0}\}$ אז $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$
- אם $\dim V < \dim U + \dim W$ אז בהכרח $U \cap W \neq \{\vec{0}\}$
- $\dim U \geq \dim(U \cap W) \Leftarrow U \cap W \subseteq U$ (חסם עליון)
- $\dim V \geq \dim(U+W) \Leftarrow U + W \subseteq V$ (חסם תחתון דרך הנוסחה)

דוגמה: חסמים על $\dim(U\cap W)$ — תבנית מבחן! (מועד א' 2024 שאלה 3ב)

$\dim U = \dim W = n-2$, $\dim V = n$. הוכח: $n-4 \leq \dim(U\cap W) \leq n-2$.

חסם עליון: $U \cap W \subseteq U \Rightarrow \dim(U\cap W) \leq \dim U = n-2$.

חסם תחתון: $U + W \subseteq V \Rightarrow \dim(U+W) \leq n$.

מנוסחת הממדים: $\dim(U+W) = (n-2) + (n-2) - \dim(U\cap W) = 2n-4-\dim(U\cap W)$

$2n-4-\dim(U\cap W) \leq n \Rightarrow \dim(U\cap W) \geq n-4$.

$U = \mathrm{Span}\{(1,0,0), (0,1,0)\}$, $W = \mathrm{Span}\{(0,0,1), (1,1,1)\}$

מחפשים $U \cap W$: וקטור $(a,b,c) \in U \Longrightarrow c = 0$.

וקטור $(a,b,0) \in W \Longrightarrow (a,b,0) = \alpha(0,0,1) + \beta(1,1,1) \Longrightarrow a = \beta,\ b = \beta,\ 0 = \alpha + \beta$.

מ-$0 = \alpha + \beta$ ו-$b = \beta = a$: רק פתרון טריוויאלי.

$U \cap W = \{\vec{0}\} \Longrightarrow \dim(U \cap W) = 0$.

$\dim(U+W) = 2 + 2 - 0 = 4$, אבל אנחנו ב-$\mathbb{R}^3$, אז $\dim(U+W) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

כלומר $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

טיפ:

תבנית חוזרת במבחנים: כששואלים "הוכח חסמים על $\dim(U \cap W)$" — **חסם עליון** תמיד מ-$U \cap W \subseteq U$, **חסם תחתון** תמיד מ-$U+W \subseteq V$ + נוסחת הממדים.

דרגה ואפסיות (Rank & Nullity)

הגדרה: דרגה, אפסיות, גרעין

עבור מטריצה $A \in M_{m\times n}(F)$:

- **גרעין (Kernel/Null space):** $Ker(A) = NulA = \{\vec{x} \in F^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$
- **דרגה:** $rank(A)$ = ממד מרחב השורות = ממד מרחב העמודות
- **אפסיות:** $nullity(A) = dim(Ker\ A)$ = מספר המשתנים החופשיים

משפט: משפט הדרגה-אפסיות (Rank-Nullity)

$$rank(A) + nullity(A) = n \quad \text{(מספר העמודות)}$$

או שקול, לה"ל $T: V \to W$:

$$dim(Ker\ T) + dim(Im\ T) = dim\ V$$

דוגמה: מציאת בסיס ל-NulA (תרגול 11)

$A = [[1,2,1,0],[0,1,0,3],[1,3,1,3]]$

דירוג:

```
[0 | 6- 1 0 1]
[0 | 3  0 1 0]
[0 | 0  0 0 0]
```

משתנים חופשיים: z, w. לכן $x = -z + 6w,\ y = -3w$.

$NulA = Span\{(-1,0,1,0),\ (6,-3,0,1)\}$

$dim(NulA) = 2$ (= nullity). rank(A) = 4 - 2 = 2.

משפט: המשפט ההפיכה הגדול — מטריצה מרובעת n×n

עבור $A \in M_n(F)$, **כולם שקולים:**

- ⟺ A הפיכה
- ⟺ $rank(A) = n$
- ⟺ $det(A) \neq 0$
- ⟺ $Ax = 0$ → רק פתרון טריוויאלי
- ⟺ $Ax = b$ פתיר לכל b (פתרון יחיד)
- ⟺ עמודות A בת"ל
- ⟺ עמודות A פורשות F^n
- ⟺ עמודות A בסיס של F^n
- ⟺ שורות A בת"ל
- ⟺ A שקולת שורה ל-I_n
- ⟺ A מכפלה של מטריצות אלמנטריות
- ⟺ $nullity(A) = 0$

טיפ:

טיפ למבחן: כשנותנים מטריצה מרובעת n×n עם פרמטר ושואלים "מתי הפיכה?" — חשב $det(A)$ ומצא מתי $\neq 0$. הרבה יותר מהיר מדירוג!

קואורדינטות והחלפת בסיס

הגדרה: וקטור קואורדינטות

אם $B = \{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V ו- $v = c_1v_1 + ... + c_nv_n$, אז:

$[v]_B = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$

דוגמה: קואורדינטות בפולינומים

ב- $F_2[x]$ עם בסיס $B = \{1, x, x^2\}$:

$p(x) = 2 + 3x - x^2 \to [p]_B = (2, 3, -1)$

$q(x) = 1 + x \to [q]_B = (1, 1, 0)$

הגדרה: מטריצת מעבר (Change of Basis)

אם $B = \{v_1,...,v_n\}$ ו- $B' = \{w_1,...,w_n\}$ בסיסים של V, ו:

$w_j = \Sigma_i\ a_{ij}\ v_i$

אז $P = [a_{ij}]$ היא **מטריצת המעבר** מ-'B ל-B:

$[v]_B = P \cdot [v]_{B'}$

$[v]_{B'} = P^{-1} \cdot [v]_B$

פתרון כללי של Ax = b

משפט: מבנה הפתרון הכללי (תרגול 11)

אם x_0 פתרון פרטי של $Ax = b$, אז:

פתרון כללי = $x_0 + NulA = \{x_0 + u \mid u \in NulA\}$

דוגמה: מציאת פתרון כללי (תרגול 11)

ידועים שני פתרונות של $Ax = b$: $x_p = (1,2)$ ו- $xq = (4,5)$.

ההפרש: $\in NulA \to$ $(-3,-3) = x_p - xq$.

$NulA = Span\{(-3,-3)\} = Span\{(1,1)\}$

פתרון כללי: $\{t(1,1) \mid t \in \mathbb{R} + (1,2)\} = \{t \in \mathbb{R} \mid (1+t, 2+t)\}$

טיפ:

חשוב: מספר המשתנים החופשיים = n - rank = nullity = dim(NulA). אם rank = n (מטריצה עם n עמודות) אז nullity = 0 ויש פתרון **יחיד** (אם קיים).

ממד מעל שדות שונים

משפט: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n \Leftarrow \dim_{\mathbb{C}}(V) = n$ (הרצאה 13, מבחן 2024 שאלה 4א)
אם V מ"ו מעל $\mathbb{C}$ עם $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$, אז $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$.

הוכחה:
יהי $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V מעל $\mathbb{C}$.
טענה: $B = \{v_1,...,v_n, iv_1,...,iv_n\}$ בסיס מעל $\mathbb{R}$.
B פורש: לכל $v \in V$, קיימים $\alpha_j = a_j + b_j i \in \mathbb{C}$ כך ש-$v = \Sigma\alpha_j v_j$.
אז $v = \Sigma a_j v_j + \Sigma b_j (iv_j) \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(B)$.
B בת"ל מעל $\mathbb{R}$: נניח $\Sigma a_j v_j + \Sigma b_j (iv_j) = 0$ (כל $a,b \in \mathbb{R}$).
$\Sigma(a_j + b_j i)v_j = 0 \Leftarrow$. כי $v_1,...,v_n$ בת"ל מעל $\mathbb{C}$: $a_j + b_j i = 0$ לכל j.
כי $a_j, b_j \in \mathbb{R}: a_j = b_j = 0$ לכל j.
$|B| = 2n$, לכן $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$.

טיפ:
הרעיון: כל מקדם מרוכב $a + bi$ "נפרש" ל-2 מקדמים ממשיים, ולכן הממד מוכפל ב-2.

תבניות למבחן

הוכח ש-dim W = n-1 ו-V = U + W ⟹ W ⊄ U
מועד א' 2024 שאלה 5א

W ⊄ U ⟹ קיים u ∈ U\W ⟹ dim(U+W) ≥ dim W + 1 = n ⟹ U+W = V.

מצא ערכי m שעבורם A הפיכה
מועד א' 2024 שאלה 4ב

חשב det(A) כפונקציה של m. A הפיכה ⟺ det(A) ≠ 0. פתור det = 0.

הוכח חסמים על dim(U∩W)
מועד א' 2024 שאלה 3ב

עליון: U∩W ⊆ U → dim(U∩W) ≤ dim U. תחתון: U+W ⊆ V → dim(U+W) ≤ dim V → הציב בנוסחת הממדים.

הוכח בת"ל ⟺ ייצוג יחיד
מועד א' 2024 שאלה 1א

⟹: חסר שני ייצוגים, מבת"ל מקדמים = 0. ⟸: נניח צ"ל = 0, גם הטריוויאלי = 0, מייצוג יחיד כולם 0.

הוכח שקבוצה בת"ל (עם וקטור "חדש")
מועד א' 2024 שאלה 1ב

הנח צ"ל = 0. הוכח בשלילה שהמקדם של הוקטור החדש = 0 (אחרת סתירה). אח"כ השאר נובע מבת"ל.

AB = A+B ⟹ A-I הפיכה
מועד א' 2024 שאלה 5ב

טריק: AB - A - B + I = I ⟹ (A-I)(B-I) = I ⟹ A-I הפיכה והופכית = B-I.

שליפה מהירה

מה רוצים	מה עושים
לבדוק בת"ל	דרג $Ax = 0$, רק פתרון טריוויאלי?
למצוא dim	מצא בסיס, ספור איברים
למצוא בסיס של תת-מרחב	פרמטריזציה ← וקטורים יוצרים
למצוא $\dim(U \cap W)$	נוסחת ממדים: $\dim U + \dim W - \dim(U+W)$
למצוא $U \cap W$	מצא וקטור שמקיים תנאי U וגם תנאי W
לבדוק הפיכות ($n \times n$)	$\det \neq 0$ או דרג ל-I_n
למצוא A^{-1}	דרג $[A \mid I] \to [I \mid A^{-1}]$
למצוא NulA	דרג $Ax = 0$, פרמטריזציה
פתרון כללי $Ax = b$	x_0 (פרטי) + NulA
לבדוק פריש	דרג $Ax = b$ לכל b, יש פתרון?