לוגיקה ותורת הקבוצות - אוניברסיטת רייכמן

הרצאה 2 - השוואת קבוצות

Set Comparison

תוכן עניינים

1. עוצמה - Cardinality

כיצד ניתן להשוות את הגודל של שתי קבוצות?

- **ספירת איברים** - עובד רק לקבוצות סופיות.
- **יש דרך יותר בסיסית** שמתאימה גם לקבוצות סופיות וגם לאינסופיות.

הגדרה: עוצמה

ה-"גודל" של קבוצה A מסומן $|A|$ ונקרא **עוצמה** (cardinality).

דוגמאות

- $|\{8,9,4\}| = 3$
- $|\{10^{100}, 999\}| = 2$
- $|\{a,b,c,d,e,f\}| = 6$
- $|\mathbb{N}| =?$ $|\mathbb{R}| =?$
- $|\mathbb{N}| \overset{?}{=} |\mathbb{Z}|$ $|\mathbb{N}| \overset{?}{=} |\mathbb{R}|$

2. קבוצות שקולות - $|A| = |B|$, $A \sim B$

הגדרה: שקילות קבוצות

קבוצות A ו-B הינן **שוות עוצמה** (או **שקולות**, equivalent), ונסמן זאת ע"י $|A| = |B|$ או $A \sim B$, אם קיימת **פונקציית שקילות (bijection)** ביניהן.

כלומר, פונקציה **מלאה**, **חד-חד ערכית** ו**על** מ-A ל-B.

$A = \{a,b,c\}$
$B = \{1,2,3\}$
$f(a) = 1$
$f(b) = 2$
$f(c) = 3$
מלאה
חח"ע
על
$|A| = |B|$

דוגמאות

- $\{a,b\} \sim \{2^{100},4\}$ $\Rightarrow$ $|\{a,b\}| = |\{2^{100},4\}|$
- $|\{a,b\}| \neq |\{2,3,4\}|$
- $A = \{1,2,3,4,\ldots\}$, $B = \{2,3,4,5,\ldots\}$ $\Rightarrow$ $|A| = |B|$ (באמצעות $f(n) = n+1$)

3. תזכורת: פונקציות

הגדרה: פונקציה

פונקציה הינה **מיפוי** מקבוצה A (התחום) לקבוצה B (הקו-תחום).
התחום והקו-תחום יכולים להיות זהים או שונים.
פונקציה חייבת להיות **מוגדרת היטב** (Well defined): כל איבר בתחום ממופה **לעד איבר אחד** בקו-תחום.

סוגי פונקציות

סוג	שם באנגלית	תנאי
מלאה	Total	כל איברי A ממופים
חח"ע (1-1)	Injective	אין איבר ב-B שממופים אליו יותר מאיבר אחד מ-A
על	Onto / Surjective	יש מיפוי אל כל איברי B
פונקציית שקילות	Bijection	מלאה + חח"ע + על

פונקציה חלקית ומלאה

- כל פונקציה (מוגדרת היטב) הינה **פונקציה חלקית** (partial function). - לא בהכרח מוגדרת לכל איבר בתחום
- חלק מהפונקציות החלקיות הינן גם **מלאות** (total function).
- בקורס מתמטיקה בדידה עסקתם רק בפונקציות מלאות. בקורס זה אנו עוסקים גם בפונקציות שאינן מלאות.

4. פונקציה הופכית והרכבת פונקציות

פונקציה הופכית (Inverse Function)

פונקציה הופכית שמאלית

לפונקציה מלאה ו-חח"ע $f : A \to B$ יש פונקציה הופכית (שמאלית), $f^{-1} : B \to A$, שהינה חח"ע ועל, אולי לא מלאה. נקראת **left inverse function**.

פונקציה הופכית מלאה

לפונקציית שקילות (מלאה, חח"ע ועל) $f : A \leftrightarrow B$ יש פונקציה הופכית $f^{-1} : B \leftrightarrow A$ שהיא גם מלאה, חח"ע ועל.

הרכבת פונקציות (Composition)

הגדרה

עבור פונקציות $f : A \to B$ ו-$g : B \to C$, ההרכבה מוגדרת להיות:

$$g \circ f(x) := g(f(x))$$

תכונה חשובה

הרכבה של פונקציות שקילות הינה גם כן פונקציית שקילות.

5. הפרדוקס של גלילאו גליליי (1638)

נתבונן על קבוצת המספרים הטבעיים:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \ldots$$

נוסיף סימון "ריבוע" ליד כל מספר:

$$0^2,\ 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2,\ \ldots$$

נפרש את הסימן כהעלאה בריבוע:

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ \ldots$$

הפרדוקס

הקבוצה של ריבועי המספרים הטבעיים $\{0^2,1^2,2^2,3^2,\ldots\}$ **מוכלת ממש** בקבוצת כל הטבעיים $\mathbb{N}$ — אך ישנה **התאמה מלאה** (bijection) ביניהן!

הפונקציה $f(n) = n^2$ היא חח"ע ועל מ-$\mathbb{N}$ אל קבוצת הריבועים.

6. דוגמאות נוספות להשוואת קבוצות

$|\mathbb{N}| \overset{?}{=} |\mathbb{Z}|$

כן! ניתן לבנות bijection מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{Z}$ למשל:

$$0 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto -1, \quad 3 \mapsto 2, \quad 4 \mapsto -2, \quad \ldots$$

$|(0,1)| \overset{?}{=} |(1,\infty)|$

כן! הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ היא bijection מ-$(0,1)$ ל-$(1,\infty)$.

$|(0,1)| \overset{?}{=} |[0,1]|$

כן! למרות ש-$(0,1) \subset [0,1]$, ניתן לבנות bijection ביניהן.

7. יחס שקילות

האם היחס של שקילות קבוצות (אותה העוצמה) אכן **יחס שקילות**?

תזכורת: יחס שקילות

יחס R הינו יחס שקילות אם הוא:

- **רפלקסיבי** (Reflexive): לכל x, מתקיים xRx.
- **סימטרי** (Symmetric): לכל x ו-y, xRy אמ"מ yRx.
- **טרנזיטיבי** (Transitive): לכל x, y, z, אם xRy ו-yRz אז xRz.

דוגמאות ליחסי שקילות

יחס	רפלקסיבי	סימטרי	טרנזיטיבי	יחס שקילות?
יחס השוויון "="	כן	כן	כן	כן
"אח של"	לא	לא	לא	לא
"אח/אחות של"	לא	כן	לא	לא
"אותה אזרחות"	כן	כן	כן/לא תלוי אם יש אזרחות כפולה	כן
"משולשים דומים"	כן	כן	כן	כן

שקילות קבוצות הוא יחס שקילות

הוכחה

$i : A \leftrightarrow A$

- **רפלקסיבי:** לכל קבוצה A, $A \sim A$ (פונקציית הזהות היא bijection).
- **סימטרי:** אם $A \sim B$ אז גם $B \sim A$ (הפונקציה ההופכית של bijection היא bijection).
- **טרנזיטיבי:** אם $A \sim B$ ו-$B \sim C$ אז $A \sim C$ (הרכבת bijections היא bijection).

נניח $A \sim B$ $f : A \leftrightarrow B$ סוג שקילות הופכית $f^{-1} : B \leftrightarrow A$ ולכן $B \sim A$

נניח $A \sim B$ ו $B \sim C$ יש לנו $f : A \leftrightarrow B$ ו $g : B \leftrightarrow C$ הרכבה של f ו-g מהווה סוג שקילות $g \circ f : A \leftrightarrow C$ ולכן $A \sim C$

8. סדר עוצמות - $|A| \le |B|$

הגדרה: קטנה או שווה עוצמה

קבוצה A קטנה או שוות-עוצמה לקבוצה B, בסימון $|A| \le |B|$, אם יש **פונקציה מלאה ו-חח"ע** מ-A ל-B.

הגדרה חלופית

$|A| \le |B|$ אם יש פונקציה (חלקית או מלאה) מ-B **על** A.

דוגמאות

- $|\{a,b\}| \le |\{2,5,8\}|$
- $|\{a,b\}| \le |\mathbb{N}|$
- $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{R}|$
- $|(0,\infty)| \le |(0,1)|$

משפט: שקילות בין הגדרות

משפט

לכל שתי קבוצות לא ריקות A ו-B, מתקיים ש-$|A| \le |B|$ **אם ורק אם** יש פונקציה מ-B על A.

מתחבאים כאן שני משפטים:

1. **משפט 1:** $|A| \le |B|$ אמ"מ יש פונקציה מ-B על A.
2. **משפט 2:** יש פונקציה מ-B על A אמ"מ יש פונקציה מלאה מ-B על A.

רעיון ההוכחה (סכמטית)

כיוון א': אם $|A| \le |B|$ אז יש פונקציה מלאה ו-חח"ע $f : A \to B$. ניתן "להפוך" אותה כדי לקבל פונקציה מ-B על A.
כיוון ב': אם יש פונקציה מ-B על A, ניתן לבחור לכל איבר ב-A מקור אחד ב-B, ולקבל פונקציה חח"ע מ-A ל-B.

8.1 $|A| \le |B|$ הינו יחס סדר מלא חלש

תזכורת: יחס סדר מלא חלש (Weak Total Order)

יחס סדר מלא חלש R הוא יחס שהוא:

- **רפלקסיבי:** xRx
- **אנטי-סימטרי:** אם xRy ו-yRx אז $x = y$ ← סימטרי רק בין זוגות שווים
- **טרנזיטיבי:** אם xRy ו-yRz אז xRz
- **מלא (Total):** xRy או yRx (לכל שני איברים)

דוגמאות ליחסי סדר

יחס	יחס סדר מלא חלש?
$\subseteq$ בין קבוצות	לא (לא מלא)
$\le$ בין מספרים	כן
$<$ בין מספרים	לא (לא רפלקסיבי)

טענה

$|A| \le |B|$ אכן מקיים את כל התנאים של יחס סדר מלא חלש:

- **מלא:** $|A| \le |B|$ או $|B| \le |A|$ (לכל קבוצות A, B).
- **רפלקסיבי:** $|A| \le |A|$.
- **אנטי-סימטרי:** אם $|A| \le |B|$ ו-$|B| \le |A|$ אז $|A| = |B|$.
- **טרנזיטיבי:** אם $|A| \le |B|$ ו-$|B| \le |C|$ אז $|A| \le |C|$.

9. עוצמה ממש קטנה - $|A| < |B|$

הגדרה: קטנה ממש (Strictly Smaller)

לצאת מלא מ A ל B ולא הפוך

עבור קבוצות A ו-B, נגדיר ש-A **קטנה ממש** מ-B, ונסמן $|A| < |B|$, אם:

$$|A| \le |B| \quad \text{ו-} \quad |A| \neq |B|$$

כלומר, קיימת פונקציה מלאה וחח"ע מ-A ל-B, **ולא קיימת** פונקציה מלאה ו-חח"ע מ-B ל-A.

דוגמאות

- $|\{4,1,2\}| < |\{2,8\}|$ (3 < 2? לא!) — תיקון: $|\{2,8\}| < |\{4,1,2\}|$
- $|\{7,8,9\}| < |\mathbb{N}|$
- $|\mathbb{Z}| \not< |\mathbb{N}|$ (כי $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$)
- $|\mathbb{N}| \overset{?}{<} |\mathbb{R}|$ (נראה בהמשך הקורס...)

10. קבוצות סופיות ואינסופיות

הגדרה: קבוצה אינסופית

קבוצה הינה **אינסופית** אם היא שקולה לתת-קבוצה ממש שלה.

$S \subset A$ אם קיים חח"ע $f : A \to S$ הפיכה

הגדרה: קבוצה סופית

קבוצה הינה **סופית** אם היא לא אינסופית.

דוגמאות

- $\emptyset$ סופית.
- $\{1,5\}$ סופית.
- לכל $n \in \mathbb{N}$, הקבוצה $\{0,1,\ldots,n-1\}$ סופית.
- $\mathbb{N}$ אינסופית.
- $\mathbb{R}$ אינסופית.

משפטים על קבוצות אינסופיות

משפט 1

אם A אינסופית ו-$A \subseteq B$ אז B אינסופית.

רעיון: מהיות A אינסופית, קיימות $S \subset A$ ו-$f : A \to S$ הפיכה. ניתן להרחיב את f ל-B כולה.

משפט 2

אם A אינסופית ו-$A \sim B$ אז B אינסופית.

(תוכיחו זאת בתירגול.)

מסקנה

אם A סופית ו-$A \sim B$ אז B סופית.

$B = \begin{cases} A \text{ סופית} \\ A \sim B \end{cases}$ סופית

11. סיכום ההרצאה

עוצמה $|A|$ → שקילות $A \sim B$ → סדר עוצמות $|A| \le |B|$ → קטנה ממש $|A| < |B|$ → סופי / אינסופי

נקודות עיקריות

- הגדרנו כיצד להשוות בין העוצמה (גודל) של קבוצות: $|A| = |B|$ (bijection), $|A| \le |B|$ (injection), $|A| < |B|$ (injection ללא bijection).
- יחס השקילות (שוויון עוצמה) בין קבוצות הינו אכן **יחס שקילות**.
- יחס ההשוואה $\le$ בין עוצמות קבוצות הינו אכן **יחס סדר מלא חלש**.
- קבוצה **אינסופית** = שקולה לתת-קבוצה ממש שלה.
- על-קבוצה של קבוצה אינסופית היא אינסופית.
- שקילות משמרת סופיות ואינסופיות.

ספרות

תורת הקבוצות של שמואל ברגר, כרך א', פרק 4.

קבוצה אינסופית = יש פונק חח״ע לתוך תת קבוצה ממש שלה

משפט 1

אם A אינסופית ו-$A \subseteq B$ אז B אינסופית.

נוכיח שקיימת $g: B \to K$ הפיכה $K \subset B$.

רעיון: מהיות A אינסופית, קיימת $S \subset A$ ו-$f: A \to S$ הפיכה. ניתן להרחיב את f ל-B כולה.

הוכחה: מהיות A אינסופית קיימת $S \subset A$ ו-$f: A \to S$ הפיכה.

נוכיח שקיימת $K \subset B$ ו- $g: B \to K$ הפיכה:

להרחבה לכל B

נבחר $K = S \cup (B \setminus A)$.

$K \subseteq B$: $S \subseteq B$ וגם $B \setminus A \subseteq B$ לכן $K \subseteq B$

$K \neq B$: מהיות $S \subset A$ קיים $a \notin S$, $a \in A$

מכיון ש $A \subseteq B$ הרי ש $a \in B$

מהגדרת ההפרש $a \notin B \setminus A$ ומכיון שגם $a \notin S$ הרי ש $a \notin K$

הוכחנו: $K \subset B$.

נבחר $g: B \to K$ באופן הבא:

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in B \setminus A \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

נוכיח חח״ע ועל (K)

g מוגדרת: לכל B אברי התחום (כל התמונות ב-K)

g חח״ע: והיו $x_1, x_2 \in B$ נניח $x_1 \neq x_2$.

3 מקרים:

- אם $x_1, x_2 \in A$: מהיות f חח״ע $f(x_1) \neq f(x_2)$ ולכן $g(x_1) \neq g(x_2)$
- אם $x_1, x_2 \in B \setminus A$: מהגדרת g ברור ש $g(x_1) \neq g(x_2)$ $x_1 \neq x_2$
- אם בה״כ $x_2 \in B \setminus A$ $x_1 \in A$: אז $g(x_1) \in S$ וגם $g(x_2) \in B \setminus A$

אך $S, B \setminus A$ זרות לכן בהכרח $g(x_1) \neq g(x_2)$

g על: יהי $y \in K$

אם $y \in B \setminus A$: נבחר $x = y$ ברור מהגדרת g ש $g(x) = y$

אם $y \in S$: מהיות f על קיים $x \in A$ כך ש $f(x) = y$ ולכן גם $g(x) = y$

הוכחנו g הפיכה

לכן B אינסופית!

ל

שאלה לשכן להוכחה

הוכחת גם 6 אוג

צריך כקי להוכ אין סוף

רק פונק חח"ע לצמן את הדוגמה עם שלה

אז תלה הוכל מקיים

שהוא ?