סיכום אלגברה ליניארית 1

הרצאות 1-26 • תרגולים • שיעורי בית • מותאם למבחני 2024

◆ דטרמיננטות — סיכום מפורט

הגדרה **דטרמיננטה (Leibniz)**

$det(A) = \Sigma_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$ — סכום על כל n! תמורות. **sgn(σ)** = +1 (זוגית) או −1 (אי-זוגית).

הגדרה **שלושת התנאים המאפיינים (אקסיומטי)**

$\Delta: M_n(F) \to F$ היא הדטרמיננטה אם ורק אם: **(1) מולטילינארית** — ליניארית בכל שורה בנפרד **(2) אלטרנטיבית** — שורות זהות ⇒ Δ=0 **(3) נרמול** — $\Delta(I_n) = 1$. הפונקציה **היחידה** שמקיימת את השלושה = נוסחת לייבניץ.

משפט **תכונות דטרמיננטה**

- $det(I_n) = 1$
- $det(A^t) = det(A)$
- $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$
- $det(A^{-1}) = 1/det(A)$
- $det(\alpha A) = \alpha^n\ det(A)$

- החלפת שורות → סימן מתחלף
- כפל שורה ב-α → det×α
- הוספת כפולה של שורה → det לא משתנה
- שורת אפסים → det = 0
- **A הפיכה ⇔ det(A) ≠ 0**

טכניקה **פיתוח לפי שורה/עמודה (Cofactor Expansion)**

$det(A) = \Sigma_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}$ (M_{ij} = מינור = det ללא שורה i ועמודה j). **טיפ:** בחר שורה/עמודה עם הכי הרבה אפסים!

משפט **מטריצה משולשית / בלוקים**

משולשית: $det = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ | בלוקים: $det([A,B\ ;\ 0,D]) = det(A) \cdot det(D)$

2×2: $ad - bc$ **3×3:** כלל סארוס או פיתוח לפי שורה **n×n:** דירוג / פיתוח / בלוקים

טכניקה **חישוב n×n**

- **דירוג:** משולשית. ספור החלפות (סימן)
- **פיתוח:** שורה עם אפסים, רקורסיבי
- **בלוקים:** פרק למכפלת det

טכניקה **באינדוקציה (מבנה חוזר)**

1. חשב $det(A_1)$, $det(A_2)$ ידנית
2. פתח ⇒ נוסחת נסיגה
3. הוכח באינדוקציה

טכניקה **דטרמיננטה עם פרמטר**

חשב det(A) כפונקציה של m.
A הפיכה ⇔ det(A) ≠ 0. פתור det=0.

משפט **אנטי-סימטרית, n אי-זוגי**

$A^t = -A$, n אי-זוגי ⇒ det(A)=0.
כי $det(A)=det(-A)=(-1)^n det(A)=-det(A)$.

משפט **Δ(A) = α·det(A) (מש"ב 11)**

כל Δ מולטילינארית ואלטרנטיבית מקיימת $\Delta(A) = \Delta(I_n) \cdot det(A)$. בפרט: Δ=det ⇐ Δ(I)=1 (יחידות!).

טיפ **det ב-Z_p**

כל החישובים mod p. ב-Z_5 — קח mod 5 בסוף!

◆ מטריצות — סיכום מפורט

הגדרה **כפל מטריצות**

$A \in M_{m\times n},\ B \in M_{n\times p}$: $(AB)_{ij} = \Sigma_k a_{ik}b_{kj}$. **לא קומוטטיבי!** אסוציאטיבי: (AB)C=A(BC). דיסטריבוטיבי: A(B+C)=AB+AC.

הגדרה **שחלוף (Transpose)**

$(A^t)_{ij} = A_{ji}$. $(A+B)^t=A^t+B^t$ $(\alpha A)^t=\alpha A^t$ $(AB)^t=B^tA^t$ (הפוך!) $(A^t)^t=A$

הוכחת $(AB)^t = B^tA^t$

$((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \Sigma_k a_{jk}b_{ki}$ = $(B^tA^t)_{ij} = \Sigma_k b_{ki}a_{jk}$ ✓

הגדרה סוגי מטריצות מיוחדים

סוג	תנאי	הערה
סימטרית	$A^t=A$	$a_{ij}=a_{ji}$
אנטי-סימטרית	$A^t=-A$	$a_{ii}=0$
אידמפוטנטית	$A^2=A$	0, I, [[1,0],[0,0]]
נילפוטנטית	$A^k=0$	det=0, Tr=0

הגדרה עקבה (Trace)

$Tr(A)=\Sigma_i a_{ii}$. Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B). **Tr(AB)=Tr(BA) תמיד!** $Tr(A^t)=Tr(A)$.

משפט הפיכות — 12 תנאים שקולים

עבור $A\in M_n(F)$, **כולם שקולים**:

- A הפיכה (קיימת A^{-1})
- det(A) ≠ 0
- rank(A) = n
- עמודות/שורות A בת"ל
- Ax=0 ⇒ x=0 (Null={0})
- Ax=b פתיר יחיד לכל b
- צורה קנונית = I_n
- מכפלת מטריצות אלמנטריות
- ∃B: AB=I (מספיק צד 1!)
- ∃B: BA=I
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (הפוך!)
- $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

הגדרה דרגה (Rank)

$rank(A)$ = מס' פיבוטים = dim(Col(A)) = dim(Row(A)). $rank(A)=rank(A^t)$. rank(AB)≤min(rank A, rank B). **Rank-Nullity:** $rank(A)+nullity(A)=n$. P הפיכה ⇒ rank(PA)=rank(A).

טכניקה טריקים אלגבריים להפיכות

נתון	טריק	תוצאה
$AB=A+B$	I = (B−I)(A−I)	A−I הפיכה
$A=I-AB$	A(I+B) = I	$A^{-1}=I+B$
$B^3=0,\ A=I-AB$	פיתוח	$A=I-B+B^2$

משפט $Null(A^tA) = Null(A)$

⊇: $Ax=0 \Rightarrow A^tAx=0$ ✓

⊆: $A^tAx=0 \Rightarrow \|Ax\|^2=(Ax)^tAx=0 \Rightarrow Ax=0$

טכניקה $rank=1 \Leftrightarrow A=uv^t$

מכפלה חיצונית. נובע: $A^2=(v^tu)A$.

$B=A^tP \Rightarrow B^t=P^tA \Rightarrow A,B^t$ שקולות שורה.

◆ שאר הנושאים — תמצית

הגדרה **שדה (Field)**

F עם +, · : קומוטטיבי, אסוציאטיבי, אדישות (0,1), נגדי, הופכי (a≠0), דיסטריבוטיביות. דוגמאות: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$. **לא:** $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6$.

הגדרה **מרחב וקטורי + תת-מרחב**

V מעל F עם 8 אקסיומות. **תת-מרחב W⊆V:** (1) 0∈W (2) סגור חיבור (3) סגור כפל בסקלר.
דוגמאות: F^n, $M_{m\times n}(F)$, $F_n[x]$ (dim=n+1), $F[x]$ (dim=∞).

הגדרה **Span**

$Span(v_1,\dots,v_k)$ = כל הצירופים הלינאריים. תמיד תת-מרחב.

הגדרה **בת"ל**

$\Sigma a_i v_i=0 \Rightarrow a_i=0$ לכל i.
ת"ל ⇔ $\exists v_j \in Span$(קודמיו).

הגדרה **בסיס + ממד**

בסיס: בת"ל + פורש.
dim(V): מס' איברים בבסיס.

משפט **שטייניץ**

בת"ל k, פורשים m ⇒ k≤m.
n ⇒ dim=n בת"ל=בסיס=n פורשים.

משפט **בת"ל ⇔ ייצוג יחיד**

$v_1,\dots,v_k$ בת"ל ⇔ לכל v∈Span יש ייצוג **יחיד** כצ"ל. הוכחה: הנח 2 ייצוגים, חסר ⇒ צ"ל=0, מבת"ל ⇒ מקדמים שווים.

הגדרה **U+W, סכום ישר**

$U+W=\{u+w\}$ (תת-מרחב!).
$V=U\oplus W$ ⇔ V=U+W, U∩W={0}.

משפט **נוסחת ממדים**

$dim(U+W)=dim(U)+dim(W)-dim(U\cap W)$
U⊕W ⇔ dim(Y)=dim(U)+dim(W).

הגדרה **מערכת לינארית Ax=b**

דרג [A|b]. שורת סתירה ⇒ אין פתרון. rank=n ⇒ יחיד. אחרת ⇒ ∞. Null(A) תת-מרחב, dim=n−rank(A). פתרון כללי: $x=x_0$+Null(A).

הגדרה **העתקה לינארית T: V→W**

$T(\alpha u+\beta v) = \alpha T(u)+\beta T(v)$. Ker(T)={v: T(v)=0}. Im(T)={T(v)}.
Rank-Nullity: dim(V)=dim(Ker)+dim(Im). חח"ע ⇔ Ker={0}. dim(V)=dim(W) ⇒ חח"ע ⇔ על.

משפט **$dim_{\mathbb{C}}(V)=n \Rightarrow dim_{\mathbb{R}}(V)=2n$**

בסיס: $(v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n)$. פורש: zv=av+b(iv) ⇐ z=a+bi. בת"ל: a+bi=0 עבור ממשיים ⇒ a=b=0.

הגדרה **פולינומים $F_n[x]$**

בסיס סטנדרטי: $(1,x,\dots,x^n)$. $p_0,\dots,p_n$ עם $deg(p_j)=j$ ⇒ בסיס. dim=n+1. F[x] **לא** נוצר סופית (dim=∞).

★ כללי זהב לבחינה

1. הגדרות מדויקות!
"ללא הסבר = 0 נק'". ציין שם משפט + תנאים.

2. הוכחת בת"ל
"נניח $\Sigma a_i v_i=0$" ⇒ $a_i=0$ לכל i.

3. הוכחת תת-מרחב
0∈W, סגור חיבור, סגור כפל.

4. הפרכה
דוגמת נגד אחת. נסה 2×2 / $\mathbb{R}^2$.

5. מערכת עם פרמטר
דרג, חלק למקרים. לא לחלק ב-0!

6. הפיכות
A ⇒ AB=I הפיכה. det≠0 ⇔ הפיכה.

7. det
det(AB)=det(A)det(B). משולשית=מכפלת אלכסון.

8. נוסחת ממדים
dim(U+W)=dim(U)+dim(W)−dim(U∩W)

9. dim(V)=n
n בת"ל = בסיס = n פורשים. n+1 = ת"ל.

10. Rank-Nullity
nullity = rank+nullity=n. מס' חופשיים.