סיכום פונקציות (הרצאות 5-7) + דוגמאות נגדיות + זהויות

מבוסס על הסיכום שלך + הרצאות + תרגולים. כולל טבלת פונקציות חשובות, זהויות טריגונומטריות, ודוגמאות נגדיות קלאסיות למבחן.

📊 טבלת פונקציות חשובות — מי רציפה? גזירה? מונוטונית?

פונקציה	תחום	טווח	רציפה	גזירה	מונוטונית	חסומה	הערות
$x = \mathrm{id}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	כן	כן, $f'=1$	עולה ממש ↗	לא	
x^2	$\mathbb{R}$	$[0,\infty)$	כן	כן, $f'=2x$	לא — יורדת ↘ ב-$(-\infty,0]$, עולה ↗ ב-$[0,\infty)$	לא	זוגית, min ב-0
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	כן	כן, $f'=3x^2$	עולה ממש ↗	לא	אי-זוגית, הפיכה
$\|x\|$	$\mathbb{R}$	$[0,\infty)$	כן	❌ לא ב-$x=0$!	לא — יורדת ↘ ב-$(-\infty,0]$, עולה ↗ ב-$[0,\infty)$	לא	⚠️ רציפה לא גזירה ב-0
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$	כן	❌ לא ב-0 ($f'\to\infty$)	עולה ממש ↗	לא	הפוכה של x^2
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	כן (בתחום)	כן, $f'=-\frac{1}{x^2}$	יורדת ↘ בכל קטע	לא	לא מוגדרת ב-0!
e^x	$\mathbb{R}$	$(0,\infty)$	כן	כן, $f'=e^x$	עולה ממש ↗	לא (מלמעלה)	$f(x)>0$ תמיד. הפוכה: $\ln x$
a^x ($a>1$)	$\mathbb{R}$	$(0,\infty)$	כן	כן	עולה ממש ↗	לא	$0<a<1$ → יורדת ↘
$\ln(x)$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$	כן	כן, $f'=\frac{1}{x}$	עולה ממש ↗	לא	הפוכה של e^x
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	כן	כן, $f'=\cos x$	לא (מחזורית)	כן, $\|\sin x\|\le 1$	אי-זוגית
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	כן	כן, $f'=-\sin x$	לא (מחזורית)	כן, $\|\cos x\|\le 1$	זוגית
$\tan(x)$	$x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$	$\mathbb{R}$	כן (בתחום)	כן, $f'=\frac{1}{\cos^2 x}$	עולה ממש בכל קטע ↗	לא	אסימפטוטות אנכיות
$\arcsin(x)$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	כן	❌ לא ב-±1	עולה ממש ↗	כן	הפוכה של sin
$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	כן	❌ לא ב-±1	יורדת ממש ↘	כן	הפוכה של cos
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	כן	כן, $f'=\frac{1}{1+x^2}$	עולה ממש ↗	כן	הפוכה של tan

💀 דוגמאות נגדיות קלאסיות למבחן

רציפה אבל לא גזירה

1. f(x) = |x| — רציפה בכל ℝ, לא גזירה ב-0

✓ רציפה · ✗ לא גזירה ב-0

הגבולות החד-צדדיים של מנת ההפרשים: מימין → 1, משמאל → -1. שונים → הנגזרת לא קיימת.

שימוש: דוגמה נגדית ל"רציפות גוררת גזירות". גם: מינימום מקומי ב-0 אבל f'(0) לא קיימת → פרמה לא חל.

2. f(x) = x^(1/3) — רציפה ב-0, לא גזירה ב-0

✓ רציפה · ✗ f'(0) = ∞

f'(0) = lim h^(1/3)/h = lim 1/h^(2/3) = ∞. הנגזרת אינסופית = משיק אנכי = לא גזירה.

3. f(x) = x·sin(1/x), f(0)=0 — רציפה ב-0, לא גזירה ב-0

✓ רציפה (סנדוויץ') · ✗ f'(0) לא קיימת

רציפה: -|x| ≤ x·sin(1/x) ≤ |x| → 0. אבל f'(0) = lim sin(1/h) מתנדנד ולא מתכנס.

גזירה אבל הנגזרת לא רציפה

4. f(x) = x²·sin(1/x), f(0)=0 — גזירה בכל ℝ, f' לא רציפה ב-0

✓ גזירה · ✗ f' לא רציפה ב-0

f'(0) = lim h·sin(1/h) = 0 (סנדוויץ'). אבל f'(x) = 2x·sin(1/x) - cos(1/x) עבור x≠0, ו-lim f'(x) כש-x→0 לא קיים.

שימוש: דוגמה נגדית ל"f גזירה ⟹ f' רציפה".

רציפה על קטע פתוח אבל לא חסומה

5. f(x) = 1/x על (0,1] — רציפה, לא חסומה, אין מקסימום

✓ רציפה · ✗ לא חסומה

כש-x→0⁺, f(x)→∞. ויירשטראס לא חל כי הקטע לא סגור!

שימוש: דוגמה נגדית לויירשטראס על קטע פתוח.

6. f(x) = x על (0,1) — רציפה, אין min ואין max

✓ רציפה · ✗ אין קיצון

sup = 1 אבל f(x) < 1 לכל x. inf = 0 אבל f(x) > 0. הקטע פתוח → אין min/max.

אי-רציפויות

7. D(x) = פונקציית דיריכלה — לא רציפה בשום נקודה

✗ לא רציפה בכלל

D(x) = 1 אם x∈ℚ, D(x) = 0 אם x∉ℚ. בכל סביבה יש רציונליים ואי-רציונליים → הגבול לא קיים.

שימוש: דוגמה קלאסית לשימוש בצפיפות Q ו-R\Q.

8. Sgn(x) = פונקציית הסימן — אי-רציפות קפיצה ב-0

קפיצה ב-0

Sgn(x) = 1 (x>0), 0 (x=0), -1 (x<0). גבולות חד-צדדיים: lim⁺=1, lim⁻=-1. שונים → אי-רציפות קפיצה.

שימוש: דוגמה נגדית ל"|f| רציפה ⟹ f רציפה" (כי |Sgn(x)|=1 בכל מקום חוץ מ-0).

9. f(x) = sin(1/x) — הגבול ב-0 לא קיים

אי-רציפות מהותית ב-0

מתנדנדת בין -1 ל-1 ללא התכנסות. אין גבול = אי-רציפות מהותית (לא סליקה ולא קפיצה).

10. f(x) = (sin x)/x, f(0)=1 — אי-רציפות סליקה "מתוקנת"

✓ רציפה אחרי תיקון

lim(x→0) sin(x)/x = 1. אם מגדירים f(0)=1 → f רציפה בכל ℝ. זו "הסרת אי-רציפות סליקה".

🔑 זהויות חשובות

ערך מוחלט (מהסיכום שלך)

תכונות ערך מוחלט + max/min

$\|x\| \ge 0$	תמיד אי-שלילי
$\|x\| = \|-x\|$	סימטריה
$\|x-y\| = \|y-x\|$	מרחק סימטרי
$-\|x\| \le x \le \|x\|$	כליאה
$\|x\| = \sqrt{x^2}$	הגדרה שקולה
$\boxed{\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|}$	⭐ אי-שוויון המשולש
$\boxed{\big\|\|x\|-\|y\|\big\| \le \|x-y\|}$	⭐ אי-שוויון המשולש ההפוך
$\|x\cdot y\| = \|x\|\cdot\|y\|$	כפליות
$\left\|\frac{x}{y}\right\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}, \quad y\neq 0$	מנה
$\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y+\|x-y\|)$	נוסחת max
$\min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-\|x-y\|)$	נוסחת min

טיפ למבחן: אי-שוויון המשולש משמש כמעט בכל הוכחת ε-δ. כשצריך לחסום $|f(x)-L|$ — פרקי עם משולש!

טריגונומטריה (מהסיכום שלך)

תכונות sin, cos

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	⭐ הזהות הבסיסית
$\|\sin x\| \le 1, \quad \|\cos x\| \le 1$	חסימות
$\cos(-x) = \cos x$	cos זוגית
$\sin(-x) = -\sin x$	sin אי-זוגית
$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$	⭐ סכום
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$	⭐ סכום
$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	הזזה

תכונות tan

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	הגדרה, $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$
$\tan(-x) = -\tan x$	אי-זוגית
$\tan(x+\pi n) = \tan x$	מחזוריות π
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	מהזהות הבסיסית

פונקציות הפוכות טריגונומטריות (מהסיכום שלך)

פונקציות הפוכות טריגונומטריות

פונקציה	תחום	טווח	הגדרה
arcsin	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$x=\arcsin(y) \iff y=\sin(x)$
arccos	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$x=\arccos(y) \iff y=\cos(x)$
arctan	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$x=\arctan(y) \iff y=\tan(x)$

ערכים חשובים: $\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$ $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$ $\arccos(1)=0$ $\arccos(-1)=\pi$

אקספוננט ולוגריתם

אקספוננט ולוגריתם

$a^x > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$	תמיד חיובית
$a>1 \Rightarrow a^x$ עולה ממש, $0<a<1 \Rightarrow a^x$ יורדת ממש	מונוטוניות
$\mathrm{Im}(a^x) = (0,\infty)$	טווח
$\log_a(x)$ הפוכה של a^x: $y>0 \Rightarrow \log_a(y)=x \iff a^x=y$	הגדרה
$\ln(x) = \log_e(x)$	לוגריתם טבעי
$\ln(e)=1, \quad e^0=1$	ערכים בסיסיים

⚡ גבולות חשובים לשינון

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$	⭐ הגבול הטריגונומטרי המרכזי
$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	נגזר מהקודם
$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$	⭐ הגבול האקספוננציאלי
$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	⭐
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	⭐ הגדרת e
$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e$	צורה שקולה
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$	⭐ אקספוננט מנצח פולינום
$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha>0$	⭐ פולינום מנצח לוגריתם

📋 טבלת סיכום: מי רציפה? גזירה? איפה הבעיה?

טענה	נכון?	דוגמה נגדית / הסבר
f גזירה $\Rightarrow$ f רציפה	✓ נכון	משפט! (הוכחה בסיכום)
f רציפה $\Rightarrow$ f גזירה	✗ לא!	$\|x\|$ רציפה ב-0, לא גזירה
f רציפה על $[a,b]$ $\Rightarrow$ f חסומה	✓ נכון	ויירשטראס (קטע סגור!)
f רציפה על (a,b) $\Rightarrow$ f חסומה	✗ לא!	$\frac{1}{x}$ על $(0,1)$
f רציפה על $[a,b]$ $\Rightarrow$ f מקבלת max/min	✓ נכון	ויירשטראס
f רציפה על (a,b) $\Rightarrow$ f מקבלת max/min	✗ לא!	$f(x)=x$ על $(0,1)$ — אין max ואין min
f גזירה + $f'(c)=0$ $\Rightarrow$ c נקודת קיצון	✗ לא!	$f(x)=x^3$, $f'(0)=0$ אבל 0 נקודת פיתול, לא קיצון
f גזירה + c קיצון $\Rightarrow$ $f'(c)=0$	✓ נכון	פרמה!
$\|f\|$ רציפה $\Rightarrow$ f רציפה	✗ לא!	$\mathrm{Sgn}(x)$: $\|\mathrm{Sgn}\|=1$ רציפה, Sgn לא
f רציפה $\Rightarrow$ $\|f\|$ רציפה	✓ נכון	הרכבת פונקציות רציפות
f גזירה, $f(x_0)=0$ $\Rightarrow$ $\|f\|$ גזירה ב-x_0	✓ נכון	סנדוויץ'
f,g רציפות $\Rightarrow$ $g\circ f$ רציפה	✓ נכון	הרכבת רציפות
$f+g$ רציפה $\Rightarrow$ f,g רציפות	✗ לא!	$f=D$ (דיריכלה), $g=1-D$. $f+g=1$ רציפה, אבל f,g לא

🎯 נגזרות חשובות לשינון

$f(x)$	$f'(x)$	
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	
e^x	e^x	⭐ יחידה: $f'=f$
a^x	$a^x\cdot\ln a$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\|<1$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\|<1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	⭐ חשוב למבחן

🧠 כלל זיכרון לדוגמאות נגדיות:

כשנתקעים ב"הוכח או הפרך" — נסי קודם את הפונקציות האלה:

$|x|$ (רציפה לא גזירה) · $\mathrm{Sgn}(x)$ (קפיצה) · $D(x)$ דיריכלה (לא רציפה) · $\frac{1}{x}$ (לא חסומה) · x^3 ($f'=0$ בלי קיצון) · $x^2\sin\frac{1}{x}$ (f' לא רציפה)