הרצאה 2 - משפט הקיום והיחידות, משפט המימדים

Existence & Uniqueness, Rank-Nullity Theorem, Isomorphisms

תוכן עניינים

1. משפט 1 — קיום ויחידות של העתקה לינארית

משפט 1 (קיום ויחידות)

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.
נניח ש-V נוצר סופית ויהיו $v_1, \dots, v_n$ **בסיס** של V.
יהיו $w_1, \dots, w_n \in W$ (**סתם** וקטורים, לאו דווקא בסיס).

אזי **קיימת ה"ל יחידה** $T : V \to W$ כך ש-$T(v_i) = w_i$ לכל $1 \le i \le n$.

המשמעות

- $w_1, \dots, w_n$ **לא בהכרח** בסיס של W.
- המימד של W **אינו בהכרח** n.
- מספיק להגדיר ה"ל על **הבסיס** — היא נקבעת באופן **יחיד** על כל המרחב.

הוכחת קיום

יהי $v \in V$. מהיות $v_1, \dots, v_n$ בסיס, קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ **יחידים** כך ש-$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.
נגדיר $T : V \to W$ באופן הבא:

$$\boxed{T(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n}$$

T **מוגדרת היטב** מכיוון ש-$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ יחידים.
בנוסף, מהיות W תמ"ו (סגור לצ"ל) נקבל ש-$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n \in W$.

צריך להוכיח שני דברים:

1. $T(v_i) = w_i$: יהי $1 \le i \le n$. אזי:

$$T(v_i) = T(0_{\mathbb{F}} v_1 + \dots + 1_{\mathbb{F}} v_i + \dots + 0_{\mathbb{F}} v_n) = 0_{\mathbb{F}} w_1 + \dots + 1_{\mathbb{F}} w_i + \dots + 0_{\mathbb{F}} w_n = w_i \ ✓$$

2. T **ה"ל:** יהיו $u, v \in V$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
נכתוב $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ ו-$v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$. אזי:

$$T(\alpha u + \beta v) = T\big((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) v_1 + \dots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) v_n\big)$$

$$= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) w_1 + \dots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) w_n$$

$$= \alpha(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n) + \beta(\beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n) = \alpha T(u) + \beta T(v) \ ✓$$

הוכחת יחידות

תהי $S : V \to W$ ה"ל המקיימת $S(v_i) = w_i$ לכל $1 \le i \le n$. **נוכיח** $S = T$.

יהי $v \in V$. לכן קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש-$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

$$S(v) = S(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 S(v_1) + \dots + \alpha_n S(v_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n = T(v)$$

לכל $v \in V$ מתקיים $S(v) = T(v)$, לכן $S = T$. ■

2. תרגיל 1 — מציאת ה"ל לפי ערכים על בסיס

תרגיל 1

תהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ה"ל המקיימת: $T\binom{1}{1} = \binom{2}{1}$, $T\binom{1}{-1} = \binom{1}{-1}$.
א. מצאו את $T\binom{x}{y}$ לכל $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$.
ב. הוכיחו ש-T הפיכה וחשבו את $T^{-1}\binom{1}{0}$.

פתרון א

יהי $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$. נסמן: $T\binom{x}{y} = \binom{ax+by}{cx+dy}$.
מהנתון השמאלי ($x = 1, y = 1$):

$$a + b = 2, \quad c + d = 1$$

מהנתון הימני ($x = 1, y = -1$):

$$a - b = 1, \quad c - d = -1$$

נפתור: $a = 1.5$, $b = 0.5$, $c = 0$, $d = 1$. לכן:

$$\boxed{T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5x + 0.5y \\ y \end{pmatrix}}$$

פתרון ב

נשים לב ש-$\{\binom{2}{1}, \binom{1}{-1}\}$ וגם $\{\binom{1}{1}, \binom{1}{-1}\}$ הם בסיסים ל-$\mathbb{R}^2$.
לכן T **מעתיקה בסיס לבסיס** — ולפי משפט 13 מהרצאה 1, היא **הפיכה**.

חישוב $T^{-1}\binom{1}{0}$: נבטא $\binom{1}{0}$ כצ"ל של איברי הבסיס:

$$\binom{1}{0} = \tfrac{1}{3}\binom{2}{1} + \tfrac{1}{3}\binom{1}{-1}$$

לכן:

$$T^{-1}\binom{1}{0} = \tfrac{1}{3}T^{-1}\binom{2}{1} + \tfrac{1}{3}T^{-1}\binom{1}{-1} = \tfrac{1}{3}\binom{1}{1} + \tfrac{1}{3}\binom{1}{-1} = \binom{2/3}{0}$$

3. משפט 2 — משפט המימדים השני (Rank-Nullity Theorem)

משפט 2 — משפט המימדים השני

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נניח ש-V נוצר סופית.
תהי $T : V \to W$ ה"ל. אזי:

$$\boxed{\dim V = \dim Ker\, T + \dim Im\, T}$$

הוכחה (מלאה)

- מהיות V נוצר סופית, קיים $n \ge 0 \in \mathbb{N}$ כך ש-$\dim V = n$.
- מכיוון ש-$Ker\, T \subseteq V$ תמ"ו, הרי שקיים $0 \le k \le n$ כך ש-$\dim Ker\, T = k$.
- **נוכיח ש-**$\dim Im\, T = n - k$ ובזאת נסיים.

מכיוון שמימד $Ker(T)$ הוא k, קיימים $v_1, \dots, v_k \in Ker\, T$ אשר מהווים **בסיס לגרעין**.
מכיוון שהם בת"ל, לפי משפט (מלינארית 1), הם ניתנים להשלמה לבסיס של V.
כלומר קיימים $v_{k+1}, \dots, v_n \in V$ כך ש-$v_1, \dots, v_n$ מהווים **בסיס ל-V**.
נתבונן בתמונות $w_{k+1} = T(v_{k+1}), \dots, w_n = T(v_n) \in W$.
נוכיח ש-$w_{k+1}, \dots, w_n$ **בסיס של** $Im\, T$ ונסיק ש-$\dim Im\, T = n - k$.

פורשים:

מהמשפט "פורשת לפורשת" (הרצ' 1 משפט 11) נובע ש:

$$Im\, T = span\{T(v_1), \dots, T(v_k), T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$$

אבל $T(v_i) = 0_W$ לכל $1 \le i \le k$ (כי $v_i \in Ker\, T$). לכן:

$$Im\, T = span\{0_W, w_{k+1}, \dots, w_n\} = span\{w_{k+1}, \dots, w_n\} \ ✓$$

בת"ל:

יהיו $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ המקיימים:

$$\alpha_{k+1} w_{k+1} + \dots + \alpha_n w_n = 0_W$$

$$\alpha_{k+1} T(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n T(v_n) = 0_W$$

T ה"ל, לכן:

$$T(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n) = 0_W$$

לכן $\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \in Ker\, T$.
מהיות $Ker\, T = span\{v_1, \dots, v_k\}$, קיימים $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{F}$ כך ש:

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k$$

$$-\beta_1 v_1 - \dots - \beta_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$$

אבל $v_1, \dots, v_n$ **בסיס ל-V** ובפרט בת"ל, לכן:

$$\beta_1 = \dots = \beta_k = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{F}} \ ✓$$

■

4. מסקנות ממשפט המימדים

תזכורת

$$\dim V = \dim Ker\, T + \dim Im\, T$$

מסקנה — קשר בין ממדים לחח"ע ועל

יהי $\mathbb{F}$ שדה, V, W נוצרים סופית, $T \in Hom(V, W)$. אזי:

תנאי	מסקנה
$\dim W = \dim V$	T **חח"ע אם"ם** T **על**
$\dim W > \dim V$	T **אינה על** (בוודאות)
$\dim W < \dim V$	T **אינה חח"ע** (בוודאות)

הוכחה (מסקנה 1: $\dim W = \dim V$)

$$T \text{ חח"ע} \iff Ker\, T = \{0_V\} \iff \dim Ker\, T = 0$$

$$\iff \dim Im\, T = \dim V = \dim W \iff Im\, T = W \iff T \text{ על}$$

■

הוכחה (מסקנה 2: $\dim W > \dim V \Rightarrow T$ אינה על)

נניח בשלילה ש-T על. לכן $W = Im\, T$ ו-$\dim W = \dim Im\, T$.
לפי משפט המימדים: $\dim W + \dim Ker\, T = \dim V$.
נציב: $\dim V < \dim W \le \dim W + \dim Ker\, T = \dim V$. סתירה! ■

הוכחה (מסקנה 3: $\dim W < \dim V \Rightarrow T$ אינה חח"ע)

נניח בשלילה ש-T חח"ע. לכן $Ker\, T = \{0_V\}$ ו-$\dim Ker\, T = 0$.
לפי משפט המימדים: $\dim V = \dim Im\, T + 0$.
לכן $\dim V = \dim Im\, T \le \dim W$. בסתירה לכך ש-$\dim W < \dim V$. ■

5. תרגיל 2 — הפרכה עם משפט המימדים

תרגיל 2

הוכיחו או הפריכו: קיימת $T \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ שעבורה $Ker\, T = Im\, T$.

הפרכה

נניח בשלילה שקיימת העתקה כנ"ל.
לפי משפט המימדים:

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim Ker\, T + \dim Im\, T = 2 \cdot \dim Im\, T$$

נקבל $\dim Im\, T = 1.5$ — **סתירה!** (מימד חייב להיות מספר שלם) ■

6. תרגיל 3 — הוכחה עם משפט המימדים ($\mathbb{R}^4$)

תרגיל 3

הוכיחו או הפריכו: קיימת $T \in Hom(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ שעבורה $Ker\, T = Im\, T$.

הוכחה (בנייה!)

ממשפט הקיום והיחידות, קיימת ה"ל יחידה $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ כך ש:

$$T(\vec{e}_1) = \vec{0}, \quad T(\vec{e}_2) = \vec{0}, \quad T(\vec{e}_3) = \vec{e}_1, \quad T(\vec{e}_4) = \vec{e}_2$$

נחשב את התמונה:

$$Im(T) = span\{T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), T(\vec{e}_3), T(\vec{e}_4)\} = span\{\vec{0}, \vec{0}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\} = span\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$$

מכיוון ש-$T(\vec{e}_1) = \vec{0}$ ו-$T(\vec{e}_2) = \vec{0}$, הרי ש-$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in Ker(T)$.
ולכן $span\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \subseteq Ker(T)$.

לפי משפט המימדים: $4 = \dim Im(T) + \dim Ker(T)$.
ידוע ש-$\dim Im(T) = 2$, לכן $\dim Ker(T) = 2$.
מכיוון ש-$span\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \subseteq Ker(T)$ והמימדים שווים:

$$Ker(T) = span\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = Im(T) \ ✓$$

■

7. תרגיל 4 — נגזרת כהעתקה לינארית

תרגיל 4

תהי $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ ההעתקה המוגדרת כך: $T(p(x)) = p'(x)$ (נגזרת).
מצאו בסיס ל-$Ker(T)$ ול-$Im(T)$.

פתרון

הגרעין:

$$Ker(T) = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p'(x) = 0\} = \{p(x) \mid p(x) = c\} = \mathbb{R}_0[x] = span\{1\}$$

כלומר בסיס ל-$Ker(T)$ הוא $\{p_0(x) = 1\}$, ומימד 1.

לפי משפט המימדים:

$$\dim \mathbb{R}_3[x] = \dim Ker(T) + \dim Im(T)$$

$$4 = 1 + \dim Im(T) \ \Rightarrow \ \dim Im(T) = 3$$

נשים לב שגם $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$. כמו כן $Im(T) \subseteq \mathbb{R}_2[x]$.
לכן לפי משפט (מימדים שווים): $Im(T) = \mathbb{R}_2[x]$.
כלומר בסיס ל-$Im(T)$ הוא $\{1, x, x^2\}$.

8. מרחב השורות, העמודות והאפס של מטריצה

הגדרות (תזכורת מלינארית 1)

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. תהיינה $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n \in \mathbb{F}^m$ עמודות A ותהיינה $\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_m \in \mathbb{F}^n$ שורות A. נגדיר:

1. מרחב השורות: $row(A) = span\{\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_m\}$ = row A
2. מרחב העמודות: $col(A) = span\{\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n\}$ = col A
3. מרחב האפס: $null(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{F}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$

דרגת שורות ודרגת עמודות

4. דרגת השורות: $\dim row(A) = row\text{-}rank(A)$
5. דרגת העמודות: $\dim col(A) = col\text{-}rank(A)$

ידוע (הוכח בלינארית 1): $rank\, A = row\text{-}rank(A)$. דרגת השורות = דרגת המטריצה.

הערה 1 — $Im(T_A) = col(A)$

ידוע שלכל $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$:

$$A\vec{x} = x_1 \vec{C}_1 + x_2 \vec{C}_2 + \dots + x_n \vec{C}_n$$

לכן:

$$col(A) = span\{\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n\} = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{F}^n\} = \{T_A(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{F}^n\} = \boxed{Im(T_A)}$$

הערה 2 — $Ker(T_A) = null(A)$

$$null(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{F}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\} = \boxed{Ker(T_A)}$$

לכן:

$$\dim null(A) = \dim Ker(T_A), \qquad \dim col(A) = \dim Im(T_A)$$

9. מסקנה 4 — Rank-Nullity למטריצות

מסקנה 4 — Rank-Nullity Theorem

תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. אזי:

$$\boxed{\dim null(A) + rank(A) = n}$$

כלומר: **מספר המשתנים החופשיים + מספר המובילים = מספר המשתנים.**

הוכחה

נתבונן בה"ל $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ המוגדרת $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$.
ממשפט המימדים השני:

$$\dim \mathbb{F}^n = \dim Ker(T_A) + \dim Im(T_A)$$

$$n = \dim null(A) + \dim col(A)$$

נותר להראות ש-$rank(A) = \dim col(A)$.
ידוע ש-$rank(A) = row\text{-}rank(A)$. תהי C הצורה הקנונית של A. ידוע ש-$row\text{-}rank(A) = row - rank(C)$ (שהינו מספר האיברים המובילים ב-C).
מכיוון שכל איבר מוביל נמצא גם בעמודה אחרת: $rank(A) = \dim col(A)$. ■

שימו לב

הדירוג **שומר על מרחב השורות** ולא בהכרח על מרחב העמודות, אבל הוא **כן שומר על המימד** של מרחב העמודות!

10. איזומורפיזם

הגדרה: איזומורפיזם

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$. תהי $T : V \to W$.
נאמר ש-T היא **איזומורפיזם** אם:

1. T היא **העתקה לינארית**.
2. T **הפיכה** (חח"ע ועל).

הגדרה: אוטומורפיזם

אם $V = W$ נאמר ש-T היא **אוטומורפיזם**.

הגדרה: מרחבים איזומורפיים

נאמר ש-V, W הם **איזומורפיים** ונסמן $V \cong W$ אם קיימת $T : V \to W$ שהיא איזומורפיזם.

iso = שווה, **morph** = צורה. מרחבים איזומורפיים הם למעשה **אותו מרחב בשינוי שמות**.

הערה 3 — איזומורפיזם הוא יחס שקילות

תכונה	טענה	נימוק
רפלקסיבי	$V \cong V$	id_V היא איזומורפיזם
סימטרי	אם $V \cong W$ אז $W \cong V$	T^{-1} ה"ל הפיכה (הרצ' 1 משפט 9)
טרנזיטיבי	אם $V \cong W$ ו-$W \cong U$ אז $V \cong U$	$S \circ T$ ה"ל (הרצ' 1 משפט 8) והרכבת הפיכות הפיכה

סיכום — כל המשפטים בהרצאה

#	משפט	תוכן
1	קיום ויחידות	מספיק להגדיר ה"ל על בסיס — היא נקבעת יחידית על כל V
2	משפט המימדים השני	$\dim Im\, T + \dim Ker\, T = \dim V$
מסק' 1-3	קשר ממדים ↔ חח"ע/על	$\dim W = \dim V \Rightarrow$ חח"ע אמ"מ על; $\dim W > \dim V \Rightarrow$ לא על; $\dim W < \dim V \Rightarrow$ לא חח"ע
מסק' 4	Rank-Nullity	$n = rank(A) + \dim null(A)$ (מספר העמודות)

קישורים חשובים

מושג מטריצה	מושג ה"ל
$col(A)$	$Im(T_A)$
$null(A)$	$Ker(T_A)$
$rank(A)$	$\dim Im(T_A)$
$\dim null(A)$	$\dim Ker(T_A)$