אלגברה לינארית 2 - שרון גל - אוניברסיטת רייכמן

הרצאה 1 - העתקות לינאריות

Linear Transformations

תוכן עניינים

1. הגדרה: העתקה לינארית (Linear Transformation)

הגדרה: העתקה לינארית

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.
תהי $T: V \to W$ פונקציה.

נאמר ש-T היא **העתקה לינארית** אם לכל $v_1, v_2 \in V$ ולכל $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$\boxed{T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)}$$

לתכונה זו קוראים **לינאריות**.

הגדרה: אופרטור לינארי

העתקה לינארית $T: V \to V$ (מ-V **לעצמו**) נקראת גם **אופרטור לינארי**.

הערה 1 — תכונות שקולות

אם $T: V \to W$ ה"ל, אזי:

1. לכל $v_1, v_2 \in V$: $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
2. לכל $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$: $T(\alpha v) = \alpha T(v)$
3. **הכללה:** לכל $v_1, \dots, v_k \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$: $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k)$

2. משפט 1 — $T(0_V) = 0_W$

משפט 1

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו V, W מרחבים מעל $\mathbb{F}$. תהי $T: V \to W$ ה"ל.
אזי: $T(0_V) = 0_W$.

"0 תמיד עובר ל-0!"

הוכחה

$$T(0_V) = T(0_{\mathbb{F}} \cdot 0_V) = 0_{\mathbb{F}} \cdot T(0_V) = 0_W$$

שימוש ב: תכונת $0_{\mathbb{F}}$ בשדה, לינאריות (סעיף 2), ושוב תכונת $0_{\mathbb{F}}$. ■

3. העתקה מטריצית — T_A

הגדרה: העתקה מטריצית T_A

יהי $\mathbb{F}$ שדה. תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.
נגדיר את ההעתקה $T_A: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ באופן הבא:

$$\boxed{T_A(\vec{x}) = A\vec{x}}$$

כלומר: T_A פשוט **מכפילה במטריצה** A.
ממדים: $(m \times n) \cdot (n \times 1) = (m \times 1)$.

משפט 2

יהי $\mathbb{F}$ שדה. תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.
אזי ההעתקה T_A **היא העתקה לינארית**.

הוכחה

יהיו $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{F}^n$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. אזי:

$$T_A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = A \cdot (\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = A \cdot (\alpha\vec{x}) + A \cdot (\beta\vec{y}) = \alpha \cdot (A\vec{x}) + \beta \cdot (A\vec{y}) = \alpha T_A(\vec{x}) + \beta T_A(\vec{y})$$

שימוש ב: הגדרת T_A, פילוג כפל מטריצות, תכונות כפל מטריצות. ■

4. דוגמאות — לינארית ולא לינארית

דוגמה 1 (לינארית) — מעל $\mathbb{Z}_5$

$T: (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^2$ כך ש-$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ -x+4y+z \end{pmatrix}$.

נתבונן במטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. אז $T = T_A$ ולפי משפט 2 היא ה"ל.

דוגמה 2 (לינארית) — מעל $\mathbb{C}$

$T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ כך ש-$T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + iz_2 \\ iz_1 - z_2 \end{pmatrix}$.

המטריצה: $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$. לכן $T = T_A$ וה"ל.

דוגמה 3 (לא לינארית!) — איבר חופשי

$T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ כך ש-$T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + iz_2 \\ iz_1 - z_2 + \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

הפרכה: לפי משפט 1, אם T ה"ל אז $T(0) = 0$. אבל $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. סתירה!

דוגמה 4 (לא לינארית!) — צמוד מרוכב

$T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ כך ש-$T(z) = \bar{z}$.
הפרכה: נניח ש-T ה"ל. אזי:
מצד אחד: $T(i \cdot i) = T(-1) = \overline{-1} = -1$
מצד שני: $T(i \cdot i) = iT(i) = i\bar{i} = i \cdot (-i) = 1$
סתירה.

דוגמה 5 — צמוד מרוכב מעל $\mathbb{R}$ כן לינארי!

אותה $T(z) = \bar{z}$, אבל כשהשדה הוא $\mathbb{R}$ (לא $\mathbb{C}$):
יהיו $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ויהיו $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. אזי:

$$T(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \overline{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2} = \bar{\alpha}_1 \bar{z}_1 + \bar{\alpha}_2 \bar{z}_2 = \alpha_1 \bar{z}_1 + \alpha_2 \bar{z}_2 = \alpha_1 T(z_1) + \alpha_2 T(z_2)$$

המעבר $\bar{\alpha}_i = \alpha_i$ עובד כי $\alpha_i \in \mathbb{R}$!

מסקנה חשובה

השדה משנה! אותה פונקציה יכולה להיות ה"ל מעל שדה אחד ולא מעל שדה אחר.

5. גרעין ותמונה — Kernel & Image

הגדרה: גרעין (Kernel)

תהי $T: V \to W$ ה"ל. **הגרעין** של T:

$$\boxed{Ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}}$$

הגרעין = קבוצת כל הווקטורים בתחום **שעוברים ל-0** בטווח.
$Ker\,T \subseteq V$.

הגדרה: תמונה (Image)

$$\boxed{Im(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid \exists v \in V,\ T(v) = w\}}$$

התמונה = קבוצת כל הווקטורים בטווח **שיש להם מקור** בתחום.
$Im\,T \subseteq W$.

6. Ker תת-מרחב ו-Im תת-מרחב

משפט 3 — $Ker\,T$ תת-מרחב של V

יהי $\mathbb{F}$ שדה, V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$. תהי $T: V \to W$ ה"ל.
אזי: $Ker(T)$ הוא **תת-מרחב וקטורי של** V.

הוכחה

(1) $0_V \in Ker\,T$: ממשפט 1, $T(0_V) = 0_W$, לכן $0_V \in Ker\,T$. ✓

(2) סגירות לצ"ל: יהיו $v_1, v_2 \in Ker\,T$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = \alpha \cdot 0_W + \beta \cdot 0_W = 0_W$$

שימוש ב: לינאריות T, ואז $T(v_1) = T(v_2) = 0_W$ (הגדרת $Ker\,T$).
לכן $\alpha v_1 + \beta v_2 \in Ker\,T$. ✓ ■

משפט 4 — $Im\,T$ תת-מרחב של W

תהי $T: V \to W$ ה"ל. אזי: $Im(T)$ הוא **תת-מרחב וקטורי של** W.

הוכחה

(1) $0_W \in Im\,T$: ממשפט 1, $0_W = T(0_V) \in Im\,T$. ✓

(2) סגירות לצ"ל: יהיו $w_1, w_2 \in Im\,T$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
מכיוון ש-$w_1 \in Im(T)$, קיים $v_1 \in V$ כך ש-$T(v_1) = w_1$.
מכיוון ש-$w_2 \in Im(T)$, קיים $v_2 \in V$ כך ש-$T(v_2) = w_2$.

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = T(\underbrace{\alpha v_1 + \beta v_2}_{\in V}) \in Im\,T$$

■

7. העתקות מיוחדות: אפס וזהות

העתקת האפס (Zero Transformation)

$T: V \to W$ כך שלכל $v \in V$: $T(v) = 0_W$.

$Ker\,T = V$, $Im\,T = \{0_W\}$.

העתקת הזהות (Identity Transformation)

$id_V: V \to V$ כך שלכל $v \in V$: $id_V(v) = v$.

$Ker(id_V) = \{0_V\}$, $Im(id_V) = V$.

8. משפטים 5-6 — לינאריות של העתקות אפס וזהות

משפט 5 — העתקת האפס היא ה"ל

הוכחה

יהיו $v_1, v_2 \in V$ ו-$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$.

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0_W = \alpha_1 0_W + \alpha_2 0_W = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

■

משפט 6 — העתקת הזהות היא ה"ל

הוכחה

יהיו $v_1, v_2 \in V$ ו-$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$.

$$id_V(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 \cdot id_V(v_1) + \alpha_2 \cdot id_V(v_2)$$

■

9. אריתמטיקה של ה"ל — Hom(V,W)

הגדרה: חיבור וכפל בסקלר של העתקות

יהיו $S, T: V \to W$ ה"ל. נגדיר:

$$(S \pm T)(v) = S(v) \pm T(v) \qquad (\alpha T)(v) = \alpha T(v)$$

משפט 7 — אריתמטיקה של ה"ל (AOLT)

יהיו $S, T: V \to W$ ה"ל ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
אזי: $\alpha T + \beta S$ **העתקה לינארית**.

צירוף לינארי של העתקות לינאריות הוא העתקה לינארית.

הוכחה

יהיו $v_1, v_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. נוכיח:

$$\begin{aligned}
&(\alpha T + \beta S)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\
&= (\alpha T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + (\beta S)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) && \text{(הגדרה 1)} \\
&= \alpha \cdot T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \beta \cdot S(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) && \text{(הגדרה 2)} \\
&= \alpha(\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)) + \beta(\alpha_1 S(v_1) + \alpha_2 S(v_2)) && \text{(ה"ל S,T)} \\
&= \alpha_1(\alpha T(v_1) + \beta S(v_1)) + \alpha_2(\alpha T(v_2) + \beta S(v_2)) && \text{(הוצאת גורמים)} \\
&= \alpha_1(\alpha T + \beta S)(v_1) + \alpha_2(\alpha T + \beta S)(v_2) && \text{(הגדרות 1,2)}
\end{aligned}$$

■

הגדרה: $Hom(V, W)$ — מרחב ההומומורפיזמים

$$Hom(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ is a linear trans.}\}$$

Hom זה קיצור של Homomorphism — העתקה בין מבנים אלגבריים המשמרת את תכונות המבנה.

מסקנה 1 — $Hom(V, W)$ תמ"ו של W^V

$Hom(V, W)$ הוא **תת-מרחב וקטורי** של W^V (מרחב כל הפונקציות מ-V ל-W).
הוכחה: ממשפט 7 סגור לצ"ל, וממשפט 5 העתקת האפס שייכת ל-$Hom(V, W)$.

10. הרכבת העתקות לינאריות — משפט 8

משפט 8 — הרכבת ה"ל היא ה"ל

יהיו U, W, V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. תהיינה $T: V \to W$, $S: W \to U$ ה"ל.
אזי: $S \circ T$ **היא העתקה לינארית** ($S \circ T: V \to U$).

הוכחה

יהיו $v_1, v_2 \in V$ ו-$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. אזי:

$$\begin{aligned}
(S \circ T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= S(T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) && \text{(הגדרת הרכבה)} \\
&= S(\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)) && \text{(ה"ל T)} \\
&= \alpha_1 S(T(v_1)) + \alpha_2 S(T(v_2)) && \text{(ה"ל S)} \\
&= \alpha_1 (S \circ T)(v_1) + \alpha_2 (S \circ T)(v_2) && \text{(הגדרת הרכבה)}
\end{aligned}$$

■

11. הפיכות, חח"ע ועל — משפטים 9-10

תזכורת: הפיכה (Invertible)

$T: V \to W$ **הפיכה** אם:

1. **T חח"ע (Injective):** לכל $v_1, v_2 \in V$ המקיימים $T(v_1) = T(v_2)$ מתקיים $v_1 = v_2$.
2. **T על (Surjective):** $Im\,T = W$ (לכל $w \in W$ קיים $v \in V$ כך ש-$T(v) = w$).

אם T הפיכה אז יש לה הופכית $T^{-1}: W \to V$ כך ש-$T(v) = w \Leftrightarrow T^{-1}(w) = v$.

משפט 9 — ההופכית של ה"ל הפיכה היא ה"ל

תהי $T: V \to W$ ה"ל. נניח ש-T הפיכה.
אזי: T^{-1} **היא העתקה לינארית**.

הוכחה

שימו לב ש-$T^{-1}: W \to V$. יהיו $w_1, w_2 \in W$ ו-$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$.
נסמן $v_1 = T^{-1}(w_1)$, $v_2 = T^{-1}(w_2)$.

מהיות T ה"ל מתקיים:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$$

נפעיל T^{-1} על שני הצדדים:

$$T^{-1}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 T^{-1}(w_1) + \alpha_2 T^{-1}(w_2)$$

■

משפט 10 — T חח"ע אם"ם $Ker\,T = \{0_V\}$

תהי $T: V \to W$ ה"ל. אזי:

$$\boxed{T \text{ חח"ע} \iff Ker\,T = \{0_V\}}$$

"בהעתקה חח"ע, רק 0 עובר ל-0!"

הוכחה (שני כיוונים)

⇐ **נניח:** T **חח"ע. נוכיח:** $Ker\,T = \{0_V\}$.
יהי $v \in Ker\,T$. מכאן ש-$T(v) = 0_W$.
ידוע ש-$T(0_V) = 0_W$ (משפט 1).
לכן $T(v) = T(0_V)$. מהיות T חח"ע: $v = 0_V$. לכן $Ker\,T = \{0_V\}$.

⇒ **נניח:** $Ker\,T = \{0_V\}$. **נוכיח:** T **חח"ע.**
יהיו $v_1, v_2 \in V$ המקיימים $T(v_1) = T(v_2)$.
לכן $T(v_1) - T(v_2) = 0_W$.
T ה"ל, לכן: $T(v_1 - v_2) = 0_W$.
מכאן ש-$v_1 - v_2 \in Ker\,T$. מההנחה: $v_1 - v_2 = 0_V$. לכן $v_1 = v_2$. ■

12. פורשת לפורשת, בת"ל לבת"ל, בסיס לבסיס

משפט 11 — פורשת לפורשת

תהי $T: V \to W$ ה"ל. יהיו $v_1, \dots, v_m \in V$ וקטורים **שפורשים** את V.
אזי: $T(v_1), \dots, T(v_m)$ **פורשים** את $Im\,T$.

הוכחה

יהי $w \in Im\,T$. לכן קיים $v \in V$ כך ש-$T(v) = w$.
מכך ש-$v_1, \dots, v_m$ פורשים את V, קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ כך ש-$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$.

$$w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_m T(v_m)$$

לכן w הוא צ"ל של $T(v_1), \dots, T(v_m)$. ■

שימו לב

$T(v_1), \dots, T(v_m)$ פורשים את $Im(T)$ — **לא בהכרח את** W!

משפט 12 — בת"ל לבת"ל (כש-T חח"ע)

תהי $T: V \to W$ ה"ל **חח"ע**. יהיו $v_1, \dots, v_k \in V$ **בת"ל**.
אזי: $T(v_1), \dots, T(v_k)$ **בת"ל**.

הוכחה

יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ כך שמתקיים: $\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) = 0_W$.
נרצה להוכיח ש-$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0_{\mathbb{F}}$.

T ה"ל, לכן: $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = 0_W$.
לכן: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \in Ker\,T$.
מהיות T **חח"ע** (משפט 10): $Ker\,T = \{0_V\}$.
לכן: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_V$.
אבל $v_1, \dots, v_k$ בת"ל, לכן: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0_{\mathbb{F}}$. ■

משפט 13 — בסיס לבסיס (T הפיכה אם"ם מעתיקה בסיס לבסיס)

תהי $T: V \to W$ ה"ל. יהיו $v_1, \dots, v_n$ **בסיס** ל-V.
אזי: T **הפיכה אם"ם** $T(v_1), \dots, T(v_n)$ **בסיס של** W.

הוכחה

⇐ **נניח:** T **הפיכה. נוכיח:** $T(v_1), \dots, T(v_n)$ **בסיס של** W.
בת"ל: מהיות $v_1, \dots, v_n$ בסיס, הם בפרט בת"ל. מכיוון ש-T חח"ע, לפי משפט 12 גם $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל.
פורשת: מהיות $v_1, \dots, v_n$ בסיס, הם פורשים את V. ממשפט 11: $T(v_1), \dots, T(v_n)$ פורשים את $Im\,T$. אבל T על, כלומר $Im\,T = W$. לכן פורשים את W.
לכן $T(v_1), \dots, T(v_n)$ קבוצה פורשת ובת"ל, כלומר בסיס ל-W.

⇒ **נניח:** $T(v_1), \dots, T(v_n)$ **בסיס של** W. **נוכיח:** T **הפיכה.**
T על: מכיוון ש-$v_1, \dots, v_n$ פורשים את V, לפי משפט 11: $Im\,T = span\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$. מההנחה: $W = span$. לכן T על.
T חח"ע: יהי $v \in Ker\,T$. מכיוון ש-$v_1, \dots, v_n$ בסיס: $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.
$0_W = T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$. מכיוון ש-$T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. לכן $v = 0_V$. לכן $Ker\,T = \{0_V\}$. ■

משמעות אינטואיטיבית

"T הפיכה אם"ם היא מעתיקה בסיס לבסיס."

13. תרגילים מההרצאה

תרגיל 1 — הוכיחו או הפריכו

קיימת ה"ל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ כך ש-$T\binom{1}{1}=\binom{1}{2}$ וגם $T\binom{2}{2}=\binom{2}{1}$.

הפרכה: נניח שקיימת ה"ל כנ"ל. אזי:

$$T\binom{2}{2}=T\left(2\cdot\binom{1}{1}\right)=2\cdot T\binom{1}{1}=2\cdot\binom{1}{2}=\binom{2}{4}$$

בסתירה לכך ש-$T\binom{2}{2}=\binom{2}{1}$.

תרגיל 2 — חישוב Im ו-Ker

תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ה"ל המקיימת: $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

א. חשבו $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$

ב. בסיס ומימד ל-$Im(T)$:

לפי משפט "פורשת לפורשת", התמונות של הבסיס הסטנדרטי פורשות את $Im(T)$. הדטרמיננט של המטריצה שעמודותיה הן התמונות $=-1\neq 0$, לכן הן בת"ל. לכן $Im(T)=\mathbb{R}^3$, מימד 3.

ג. T חח"ע?

לפי משפט "בסיס לבסיס": הבסיס הסטנדרטי מועתק לבסיס של $\mathbb{R}^3$, לכן T הפיכה ובפרט חח"ע.

לחלופין: לפי משפט 10, $Ker(T)=\{0\}$ (כי T חח"ע).

תרגיל 3 (לקריאה עצמית) — $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}\binom{x}{y}$

פתרון:

$T=T_A$, לכן ה"ל.

$Im\,T=span\left\{T\binom{1}{0},T\binom{0}{1}\right\}=span\left\{\binom{1}{3},\binom{1}{0}\right\}=\mathbb{R}^2$ (בת"ל, מימד 2).

$Ker\,T=\left\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}\binom{x}{y}=\binom{0}{0}\right\}$. המטריצה A הפיכה, לכן פתרון יחיד $\binom{0}{0}$. כלומר $Ker\,T=\left\{\binom{0}{0}\right\}$, בסיס $\emptyset$.

סיכום — כל המשפטים בהרצאה

#	משפט	תוכן
1	$T(0_V)=0_W$	0 תמיד עובר ל-0
2	T_A ה"ל	כל העתקה מטריצית היא לינארית
3	$Ker\,T$ תמ"ו	הגרעין הוא תמ"ו של V
4	$Im\,T$ תמ"ו	התמונה היא תמ"ו של W
5	העתקת אפס ה"ל	$T(v)=0_W$ היא ה"ל
6	העתקת זהות ה"ל	$id_V(v)=v$ היא ה"ל
7	AOLT	$\alpha T+\beta S$ ה"ל
8	הרכבה	$T\circ S$ ה"ל
9	הופכית	T^{-1} ה"ל (כש-T הפיכה)
10	חח"ע $\iff$ Ker	T חח"ע אם"ם $Ker\,T=\{0\}$
11	פורשת → פורשת	תמונות של פורשת פורשות את $Im\,T$
12	בת"ל → בת"ל	תמונות של בת"ל הן בת"ל (כש-T חח"ע)
13	בסיס ↔ בסיס	T הפיכה אם"ם מעתיקה בסיס לבסיס